I 1° Montrer que, quels que soient les nombres λ et x réels, la série

$$1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda+1)}{4}x^2 + \ldots + \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{(k!)^2}x^k + \ldots$$

converge. Dans toute la suite, on notera $f_\lambda(x)$ la somme de cette série.

2° *a.* Préciser quelles sont les fonctions f_1, f_0, f_{-1} et f_{-2}.

b. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, la fonction f_{-n} est polynômiale de degré n, et indiquer quel est son terme de plus haut degré.

3° Donner une valeur décimale approchée du nombre $f_{1/2}(-1)$ avec une erreur absolue inférieure à 2.10^{-3}.

II 1° λ étant un nombre réel donné, on cherche une fonction $x \longmapsto y(x)$ réelle de variable réelle, telle que $y(0) = 1$, qui soit la somme d'une série entière de rayon de convergence infini :

$$y(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \ldots,$$

et qui, pour tout x réel, vérifie l'équation : $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (1-x)\dfrac{dy}{dx} - \lambda y = 0$.

Trouver la valeur de a_1 et, pour tout entier $k \geqslant 2$, la relation de récurrence entre a_{k-1} et a_k, condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi. En déduire que le problème a pour unique solution la fonction $y = f_\lambda(x)$ introduite au I.

2° Écrire une équation différentielle du deuxième ordre satisfaite par la fonction $x \longmapsto e^x f_\lambda(-x)$. En admettant que ladite fonction est somme d'une série entière de rayon de convergence infini, montrer que, quels que soient λ et x réels, on a l'égalité :

$$f_{1-\lambda}(x) = e^x f_\lambda(-x).$$

3° Soit n un entier fixé $\geqslant 1$. Quand x tend vers $+\infty$, quelle est la limite de $\dfrac{f_{n+1}(x)}{x f_n(x)}$?

III 1° Pour tout x réel < 1, calculer l'intégrale

$$G(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - x\sin^2\theta}.$$

2° Pour tout x réel, on pose

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} e^{x\sin^2\theta}\, d\theta.$$

N.B. — On ne cherchera pas à calculer explicitement l'intégrale définissant $\varphi(x)$.

a. Montrer que, pour tout u réel < 1, on a $e^u \leqslant \dfrac{1}{1-u}$.

b. En utilisant cette inégalité sous l'intégrale définissant $\varphi(x)$, montrer que, pour tout x réel < 1, on a :

$$0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

c. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout x réel $\leqslant -1$, on ait

$$\varphi(x) \geqslant \frac{c}{\sqrt{-x}}.$$

3° *a.* Pour tout entier $k \geqslant 0$, on pose

$$I_k = \int_0^{\pi/2} \sin^{2k}\theta\, d\theta.$$

En intégrant par parties, trouver une relation entre I_k et I_{k+1}. En déduire la valeur des I_k.

b. Sous l'intégrale définissant $\varphi(x)$ au III 2°, remplacer $e^{x\sin^2\theta}$ par une série entière de la variable $x\sin^2\theta$, puis, en admettant qu'on peut permuter l'intégration et la sommation, montrer que, pour tout x réel, on a $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2} f_{1/2}(x)$.

c. Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f_{1/2}(x) = 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_{1/2}(x)\, dx$ est-elle convergente ou divergente?

4° Montrer que, si l'on attribue à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-\sin^2\theta}\, d\theta$ la valeur 1, on commet une erreur absolue inférieure à 2.10^{-2}, mais que néanmoins 1 n'est pas la valeur exacte de cette intégrale.

IV On note x_1, x_2, x_3 les coordonnées cartésiennes dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et l'on pose

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Comment choisir le nombre réel λ pour que la fonction

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_\lambda(r)$$

vérifie, dans $\mathbb{R}^3$ privé de Ox_2x_3, la relation :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} - \frac{r}{x_1}\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{1}{4r^2}F = 0\ ?$$

E.N.S.I. P
MATHEMATIQUES I
1977
×93×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail